Neumann 境界条件付 Allen-Cahn 方程式の特異極限問題

水野 将司 (日大理工)
利根川 吉廣 (北大理)

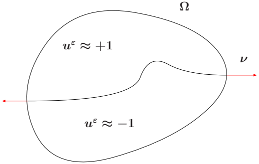
2014 年 9 月 28 日

Allen-Cahn 方程式の特異極限

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2} & t>0,\ x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0 & t>0, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x) & x\in\Omega. \end{cases} \qquad \text{(AC)}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 滑らかな境界を持つ有界領域, $W(u) = \frac{1}{4}(1-u^2)^2$

- Ilmanen (1993),Soner (1997)
  $\Omega = \mathbb{R}^n$ (境界のない問題)



$$d\mu_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) dx$$

$$\Longrightarrow \mu_t^\varepsilon \rightharpoonup \theta(x)\mathscr{H}^{n-1}\lfloor_{\Gamma_t} \quad (\varepsilon\downarrow 0)$$

$\Gamma_t \cong \{\lim_{\varepsilon\downarrow 0} u^\varepsilon = 0\}$: (大雑把に) $(n-1)$ 次元平均曲率流の解

$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \dfrac{\nabla u^\varepsilon}{|\nabla u^\varepsilon|}$: (大雑把に) Γ_t の法ベクトル

問題と主結果

$$d\mu_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\, dx$$

問題

境界条件をつけたらどうなるのか？

定理 (境界条件付 Brakke 流)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は強凸, すなわち $\partial\Omega$の曲率 > 0

1. $\partial\Omega$ までこめて, $\mu_t^\varepsilon \rightharpoonup \exists \mu_t$ $\quad (\varepsilon \downarrow 0$, 部分列) $\quad$ for unif. $t \geq 0$
2. μ_t は幾何学的測度論における平均曲率流の解 (Brakke 流)
3. (直交境界条件) $\|\delta\mu_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top}\| \ll \mu_t \quad$ a.a. $t \geq 0$

ただし, $X \in C(\partial\Omega : \mathbb{R}^n)$ に対して

$$\delta\mu_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top}(X) := \delta\mu_t \lfloor_{\partial\Omega}(X - (X \cdot \nu)\nu)$$

なぜ, $\|\delta\mu_t \lfloor_{\partial\Omega}^{\top}\| \ll \mu_t$ が直交境界条件なのか？

発散定理と Radon-Nikodym 分解

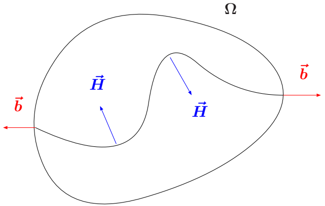
(M^{n-1}, g): $\overline{\Omega}$ 上の (超) 曲面, $X \in C^1(\overline{\Omega} : \mathbb{R}^n)$

発散定理

$$\int_M \mathrm{div}_M X \, dg = -\int_M X \cdot H \, dg + \int_{\partial M} X \cdot \vec{b} \, d\sigma$$

ただし, H は平均曲率ベクトル, $\vec{b}$ は従法線ベクトル

$$\delta\mu_t(X) := \int_\Omega \mathrm{div}_M X \, dg$$



Radon-Nikodym 分解

$$\delta\mu_t = -H \, d\mu + \vec{b} \, d\sigma$$

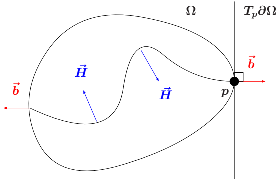
境界条件の定式化

$$\delta\mu_t = -H\,d\mu + \vec{b}\,d\sigma, \quad \delta\mu_t\lfloor^{\top}_{\partial\Omega}(X) := \delta\mu_t\lfloor_{\partial\Omega}(X - (X\cdot\nu)\nu)$$

$X - (X\cdot\nu)\nu$: X の $\partial\Omega$ での接成分

$\|\delta\mu_t\lfloor^{\top}_{\partial\Omega}\| \ll \mu_t \Longrightarrow$ 特異測度はでてこない

$\vec{b} \perp \partial\Omega \Rightarrow \vec{b} \parallel \nu \Rightarrow \Gamma_t \perp \partial\Omega$



技術的な点

$$\delta\mu_t^{\varepsilon}(X) = \int_{\Omega} \mathrm{tr}\left(DX\left(I - \frac{\nabla u^{\varepsilon}}{|\nabla u^{\varepsilon}|}\otimes\frac{\nabla u^{\varepsilon}}{|\nabla u^{\varepsilon}|}\right)\right) d\mu_t^{\varepsilon}$$
$$= \int_{\partial\Omega} (X\cdot\nu)\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^{\varepsilon}|^2 + \frac{W(u^{\varepsilon})}{\varepsilon}\right) d\sigma + \cdots$$