Neumann 境界条件下の Allen-Cahn 方程式に対する境界単調性公式

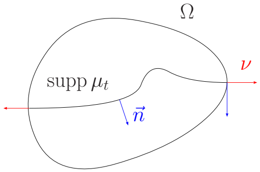
水野 将司 (日大理工)
利根川 吉廣 (北大理)

2012 年 9 月 19 日

Allen-Cahn 方程式

$$
\begin{cases}
\varepsilon u_t^\varepsilon = \varepsilon \Delta u^\varepsilon - \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon} & t > 0,\ x \in \Omega, \\
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0 & t > 0, \\
u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon(x) & x \in \Omega.
\end{cases} \qquad \text{(AC)}
$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 有界領域, $\partial\Omega \in C^\infty$,
ν: $\partial\Omega$ 上の外向単位法線ベクトル場,
$\varepsilon > 0$: 小さなパラメータ,
$W(u^\varepsilon) := (1-(u^\varepsilon)^2)^2$



$$
\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) dx =: d\mu_t^\varepsilon
$$

- Ilmanen (1993)

$$
\mu_t^\varepsilon \rightharpoonup \mu_t \quad (\varepsilon \downarrow 0)
$$

μ_t: (内部で) 平均曲率流の Brakke 解 (spt μ_t が平均曲率流の解)

動機と既存の結果

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{W(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) dx =: d\mu_t^\varepsilon \rightharpoonup d\mu_t \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

問題と動機

μ_t の境界挙動はどうなっているか？ 単調性公式は導出できるか？

1. 余次元 2 の部分多様体はどのように解析すべきか？
2. μ_t は境界まで込めて平均曲率流の解か？直交条件をみたすか？
3. μ_t は境界でどのように動いているのだろうか？

既存の結果 (境界単調性公式の導出について)

- Allard (1975), Grüter-Jost (1985), Bourni (2012)
  定常 varifold (優臨界 Sobolev 不等式の Radon 測度への拡張)
- Y.-M. Chen-F.-H. Lin (1993)
  Dirichlet 境界条件における調和写像流
- Tonegawa (2003)
  Neumann 境界条件における定常 Allen-Cahn 方程式と特異極限問題

境界単調性公式

定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 凸,　初期値 u_0^ε : 都合のよい関数

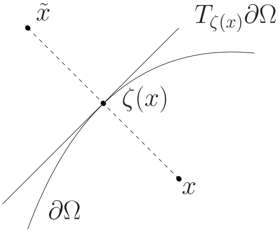
$\Longrightarrow \exists C > 0$ s.t. $\forall y \in \partial\Omega$, $\forall s > 0$, $0 < \forall t < s$

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(C(s-t)^{\frac{1}{4}}\right)\int_\Omega (\rho\eta + \tilde{\rho}\tilde{\eta})\, d\mu_t(x) + (\text{補正項})\right) \le 0$$

ただし, η, $\tilde{\eta}$ は cut-off 関数,

$$\rho(t,x) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}\right),$$

$$\tilde{\rho}(t,x) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}}\exp\left(-\frac{|\tilde{x}-y|^2}{4(s-t)}\right)$$



注意 $(\nabla\rho + \nabla\tilde{\rho})\cdot\nu\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0$ (許容条件)

単調性公式の意味

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(C(s-t)^{\frac{1}{4}}\right)\int_{\Omega}(\rho\eta+\tilde{\rho}\tilde{\eta})\,d\mu_t(x)+(\text{補正項})\right)\leq 0$$

$$t\uparrow s \Longrightarrow \rho(t,x)\to\delta_y$$

$$\Longrightarrow \mu_s(\{y\})\leq\int_{\Omega}\rho(t_0,x)\,d\mu_{t_0} \qquad \text{(形式的)}$$

(正確には, Gauss 密度の有界性が得られる)

偏微分方程式論の言葉では？

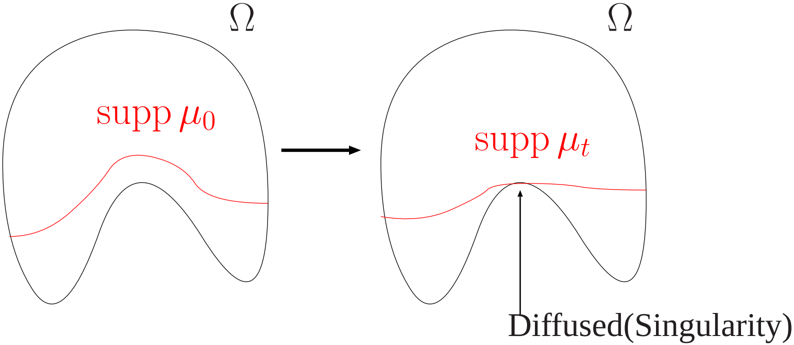
単調性公式は局所最大値原理 (L^∞ - L^1 評価) を含む
種々の正則性理論が得られる (おそらく弱 Harnack 評価も含む)

(境界) 単調性公式から得られる (だろう) こと

- μ_t は境界までこめて平均曲率流の Brakke 解
- $\mathrm{spt}\,\mu_t$ が平均曲率流の解 (修正可能性, 整 varifold, 正則性)

凸性に関する注意

(おそらく) 凸性をはずすことはできない.



拡散がおこる $\Longrightarrow$ 正則性が壊れる $\Longrightarrow$ 単調性公式が成り立たない