Neumann境界条件下のAllen-Cahn方程式に対する境界単調性公式

水野 将司　(日本大学 理工学部)*1

利根川 吉廣　(北海道大学 大学院理学研究院)*2

次のNeumann境界条件におけるAllen-Cahn方程式を考える:

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t u^\varepsilon - \varepsilon\Delta u^\varepsilon + \dfrac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon} = 0, & t>0,\ x\in\Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, & t>0, \\ u^\varepsilon(0,x) = u_0^\varepsilon, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{AC}$$

ただし, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は滑らかな境界を持つ有界領域, ν は $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトル, $\varepsilon>0$ はパラメータ, $W(u)=(1-u^2)^2$ とする. Allen-Cahn方程式はModica-Mortola問題のエネルギー汎関数

$$E_\varepsilon[u] := \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u)\right)dx$$

の勾配流である.

$\varepsilon>0$ に対して(AC)は一意解を持ち, $\varepsilon\to 0$ とすると, 平均曲率流方程式をみたす界面を生成することが知られている. Neumann境界条件から, 生成される界面は境界に対して直交し, 余次元が2の部分多様体となっていると考えられる. そこで, この界面の境界挙動を考察する. 境界の正則性を調べるためには, Huiskenの単調性公式が重要であるため, 本講演では, エネルギー測度に対する境界単調性公式を導出する.

Allard [1] はヴァリフォールドの第一変分と境界の正則性を単調性公式を用いて研究し, Grüter-Jost [4] によって, 自由境界問題に拡張した. Chen-Lin [3] はDirichlet境界条件下での調和写像流の境界単調性公式を導出し, 境界正則性を研究した. また, 定常のAllen-Cahn方程式に対して, Tonegawa [7] が単調性公式を導出し, 密度の評価を与えた. 本講演では, 発展Allen-Cahn方程式に対して, 境界単調性公式を導出する.

主定理を述べるために, 次を仮定する:

(A1) ある定数 $M>0$ が存在して, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, 初期値 u_0^ε は

$$\|u_0^\varepsilon\|_\infty \le M, \qquad \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon}{2}{}_0|\nabla u_0^\varepsilon|^2 + \frac{W(u_0^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dx \le M$$

をみたす(エネルギーの有界性).

(A2) 領域 Ω は凸とする. すなわち, $\partial\Omega$ の主曲率はすべて負とする.

本研究は科研費基盤研究(B)(#21340033) と(S)(#21224001)の助成を受けたものである。

*1 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台1-8-14
e-mail: mizuno@math.cst.nihon-u.ac.jp
web: http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~mizuno

*2 〒060-0810 北海道札幌市北区北10条西8丁目
e-mail: tonegawa@math.sci.hokudai.ac.jp
web: http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tonegawa/toppage.htm

(A3) 初期値 u_0^ε は次の不等式をみたす (ディスクレパンシーの非正値性):

$$\frac{\varepsilon|\nabla u_0^\varepsilon|^2}{2} - \frac{W(u_0^\varepsilon)}{\varepsilon} \leq 0.$$

修正したエネルギー測度 μ_t^ε とディスクレパンシー測度 ξ_t^ε を

$$d\mu_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 + \frac{\tilde{W}(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) dx, \quad d\xi_t^\varepsilon := \left(\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 - \frac{\tilde{W}(u^\varepsilon)}{\varepsilon}\right) dx$$

で定義する. ただし, $\tilde{W}(u^\varepsilon) = W(u^\varepsilon) + \varepsilon M$ とする. このとき, μ_t^ε の $\varepsilon \to 0$ での極限測度 μ_t は内部で平均曲率流の Brakke 解となる (cf. Ilmanen [5]). $x \in \Omega$ を $\partial\Omega$ に十分に近い点とすると, $\zeta(x) \in \partial\Omega$ が一意に存在して $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = |x - \zeta(x)|$ をみたす. この $\zeta(x)$ を用いると, x の $\partial\Omega$ における反射点 $\tilde{x}$ を $\tilde{x} := 2\zeta(x) - x$ で定めることができる. $\eta \geq 0$ を滑らかなカットオフ関数である $r > 0$ に対して $0 \leq \eta \leq \chi_{[0,r]}$ をみたすとする. $s > 0$ と $y \in \Omega$ に対して, 後向き熱核と反射後ろ向き熱核を $0 < t < s$ と $x \in \Omega$ に対して

$$\rho = \rho_{(s,y)}(t,x) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}\right),$$
$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{(s,y)}(t,x) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{|\tilde{x}-y|^2}{4(s-t)}\right)$$

で定める.

定理 1. (A1)–(A3) を仮定し, $\varepsilon > 0$ に対して u^ε を (AC) の解とし, $r > 0$ は十分小とする. 任意の $y \in \partial\Omega$ に対して, n, r, M と $\partial\Omega$ の形状に依存する C_1, $C_2 > 0$ が存在して

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(C_1(s-t)^{\frac{1}{4}}\right)\int_\Omega (\rho\eta(|x-y|) + \tilde{\rho}\eta(|\tilde{x}-y|))\, d\mu_t^\varepsilon \right.$$
$$\left. + C_2\int_t^s \exp\left(C_1(s-\tau)^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{s-\tau}}\right) d\tau\right) \leq 0 \quad (1)$$

が $0 < t < s$ に対して成り立つ.

単調性公式から, Gaussian 密度が境界まで有界であることがわかる. 単調性公式は平均曲率流の Brakke 解の存在, とりわけ, ディスクレパンシー測度の消滅について重要な役割をはたす. 境界近傍を含めて Brakke 解の存在を示せると, Kasai-Tonegawa [6] の内部正則性の結果を境界まで拡張することが自然と考えられ, 今後の課題となる.

参考文献

[1] W. K. Allard, Ann. of Math. (2) **101** (1975), 418–446.

[2] K. A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Mathematical Notes, vol. 20, Princeton University Press, 1978.

[3] Y.-M. Chen and F.-H. Lin, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 327–346.

[4] M. Grüter and J. Jost, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), 129–169.

[5] T. Ilmanen, J. Differential Geom. **38** (1993), 417–461.

[6] K. Kasai and Y. Tonegawa, *A general regularity theory for weak mean curvature flow*, preprint.

[7] Y. Tonegawa, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 69–83.