発展p-Laplace方程式の解に対する Hölder評価について

水野 将司　(北海道大学 大学院理学研究院)*

次の発展p-Laplace方程式の解に対するHölder連続性を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div} f, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $u:(0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$は未知関数, $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$と$u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$は与えられた外力と初期値とし, $p>\frac{2n}{n+2}$とする. 方程式(1)は$|\nabla u|=0$の点で退化するため, 古典解は一般には存在しない. そこで, 弱解を超関数の意味で定義する. すなわち

定義 1. uが(1)の弱解であるとは, $T>0$が存在して, 次をみたすときをいう:

(1) $u\in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$かつ$\nabla u\in L^p((0,T)\times\mathbb{R}^n)$;

(2) 殆んどすべての$0<t<T$と$\varphi\in C^1(0,T;C_0^1(\mathbb{R}^n))$に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi\,dx\Big|_0^t + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}(-u\partial_t\varphi + |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi)\,dxd\tau = -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\nabla\varphi\,dxd\tau.$$

弱解の存在はBrowder [1]によって示されている. 本講演では, 弱解の局所Hölder正則性とfの正則性との関係を考える. $f\equiv 0$についてはDiBenedetto-Friedman [3]やWiegner [6]によって, ∇uのHölder連続性が示された. $f\not\equiv 0$については, Misawa [4]によりfが(t,x)について局所Hölder連続ならば∇uがHölder連続性となることが示された. 我々は, Misawaによって与えられた外力の正則性の条件を弱めることができた.

定理を述べるために記号を導入する. $t_0\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $R>0$に対し, $B_R(x_0)$はx_0中心, 半径Rの開球, $Q_R(t_0,x_0)=(t_0-R^2,t_0)\times B_R(x_0)$とし, $f\in L^1(B_R(x_0))$に対して

$$(f)_{B_R(x_0)} := \frac{1}{|B_R(x_0)|}\int_{B_R(x_0)} f\,dx$$

とおく. ここで, $|B_R(x_0)|$は$B_R(x_0)$のn次元Lebesgue測度である.

定理 2 ([5])**.** ある定数$C>0$と$\gamma>n+2$が存在して, 外力fは

$$\sup_{\substack{0<R<1 \\ Q_R(t_0,x_0)\subset(0,\infty)\times\mathbb{R}^n}} \frac{1}{R^\gamma}\iint_{Q_R(t_0,x_0)} |f-(f(t))_{B_R(x_0)}|^{\frac{p}{p-1}}\,dxdt \le C \tag{2}$$

をみたすとする. このとき, (1)の弱解uに対して, ∇uは局所Hölder連続となる.

* e-mail: mizuno@math.sci.hokudai.ac.jp
web: http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~mizuno/

注意 3. f が (t,x) について局所 Hölder 連続ならば, (2) が成り立つ．さらに, $\frac{2}{r}+\frac{n}{q}<1$ をみたす $r,q\geq 1$ に対して $\nabla f\in L^r(0,\infty\,;\,L^q(\mathbb{R}^n))$ ならば, Póincare の不等式を空間方向に用いることにより (2) は成り立つ．とりわけ, 外力 f について, t に関する連続性を仮定せずに ∇u の Hölder 連続性が成り立つ.

注意 3 において, r,q に関する仮定は次の意味で摂動が小さいことに対応する. 簡単のため, $(t_0,x_0)=(0,0)$ とし, $\rho>0$ に対し

$$u_\rho(s,y)=\frac{1}{\rho}u(t,x),\quad f_\rho(s,y)=f(t,x),\quad t=\rho^2 s,\quad x=\rho y$$

とおくと, u_ρ は f_ρ を外力とする (1) の解となる．このとき,

$$\|\nabla_y f_\rho\|_{L^r_tL^q_x(Q_1(0,0))}=\rho^{1-\frac{2}{r}-\frac{n}{q}}\|\nabla_x f\|_{L^r_tL^q_x(Q_R(0,0))}$$

となり, $\frac{2}{r}+\frac{n}{q}<1$ より, $\rho\to 0$ としたときに $\|\nabla_y f_\rho\|_{L^q_tL^r_x(Q_1(0,0))}\to 0$ となる．また, $\frac{2}{r}+\frac{n}{q}=1$ は, $L^\infty(0,T\,;\,L^2(B_\rho))\cap L^2(0,T\,;\,H^1_0(B_\rho))$ が $L^r(0,T\,;\,L^q(B_\rho))$ に埋め込めるための臨界指数である.

定理 2 の証明は (1) の解 u を

$$\begin{cases}\partial_t v-\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)=0, & \text{in } Q_R(0,0)\\ \hfill v=u, & \text{on } Q_R(0,0)\text{ の放物型境界}\end{cases}\tag{3}$$

の解 v の摂動とみて評価することによる．実際に $p>2$ に対して, 次が成り立つ.

補題 4. n,p にのみ依存する定数 $C>0$ が存在して,

$$\int_{B_R(0)}(v(0)-u(0))^2\,dx+\iint_{Q_R(0,0)}|\nabla u-\nabla v|^p\,dxdt \leq C\iint_{Q_R(0,0)}|f-(f(t))_{B_R(0)}|^{\frac{p}{p-1}}\,dxdt$$

が成り立つ.

補題 4 は (3) から (1) をひき, $v-u$ をかけて部分積分することで得られる. ∇v に対する評価と補題 4 を用いることで, ∇u の平均振動を評価することで, ∇u の Hölder 連続性が得られる.

注意 5. $p>\frac{2n}{n+2}$ は ∇u が有界となるための条件である. ∇u が有界ならば, $p>1$ に対して ∇u の Hölder 連続性が示せる (cf. Choe [2]).

参考文献

[1] Browder, F. E., Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 858–861.
[2] Choe, H.-J., Comm. Partial Differential Equations, **16** (1991), 1709–1732.
[3] DiBenedetto, E. and Friedman, A., J. Reine Angew. Math., **357** (1985), 1–22.
[4] Misawa, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4), **181** (2002), 389–405.
[5] Mizuno, M., J. Math. Anal. Appl., **382** (2011), 785–791.
[6] Wiegner, M., Ann. Mat. Pura Appl. (4), **145** (1986), 385–405.