退化 Keller-Segel 方程式系の解に対する Hölder 連続性と漸近安定性について

小川 卓克 (東北大・理)

水野 将司 (東北大・理, 学振研究員 DC)

2009 年 3 月 26 日

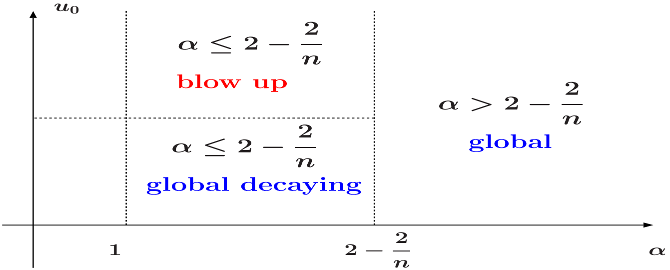
大域解の存在, 非存在

退化 Keller-Segel 方程式系

$$
\text{(dKS)}\quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^{\alpha} + \operatorname{div}(u\nabla\psi) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi + \psi = u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}
$$

ただし $n \geq 3$, $\alpha > 1$.

- Sugiyama ’06, Sugiyama-Kunii ’06



減衰する大域解の漸近安定性

退化 Keller-Segel 方程式系

$$
\text{(dKS)} \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^{\alpha} + \mathrm{div}(u \nabla \psi) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi + \psi = u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}
$$

ただし $n \geq 3$, $\alpha \leq 2 - \frac{2}{n}$, u_0 : 十分小, $\mathscr{U}$: Barenblatt 解.

- Luckhaus-Sugiyama '07

$$
\|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_{L^1} = o(1), \quad t \to \infty.
$$

- Ogawa '08

$$
\alpha < 2 - \frac{2}{n} \Longrightarrow \exists \nu > 0 \text{ s.t.}
$$

$$
\|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_{L^1} = O(t^{-\nu}), \quad t \to \infty.
$$

減衰する大域解の漸近安定性 (臨界的)

退化 Keller-Segel 方程式系

$$
\text{(dKS)} \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u^{\alpha} + \operatorname{div}(u\nabla\psi) = 0, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta\psi + \psi = u, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}
$$

定理 (漸近安定性と収束の速さ)

$\alpha = 2 - \frac{2}{n}$, $n \geq 3$, u_0 : 十分小,
ある $\beta > n$ に対し, $|x|^{\beta} u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$
\Longrightarrow \ \exists \nu > 0 \ \text{s.t.} \ \|u(t) - \mathscr{U}(t)\|_{L^1} = O(t^{-\nu}), \quad t \to \infty,
$$

ただし $\mathscr{U}(t,x)$: Barenblatt 解, $\|u_0\|_{L^1} = \|\mathscr{U}(0)\|_{L^1}$.

証明の概略

(dKS) の自己相似変換 (v, ϕ)

$$\begin{cases} \partial_s v - \Delta_y v^\alpha = \mathrm{div}_y(yv - e^{-\kappa s} v \nabla_y \phi), \\ -e^{-2s}\Delta_y \phi + \phi = v, \\ v(0, y) = u_0(y) \geq 0, \end{cases}$$

ただし, $\kappa = n(2-\alpha) \geq 2, \ \alpha \leq 2 - \frac{2}{n}$.

補題

$\exists C, \ \gamma > 0$ s.t.

$$|v(t,x) - v(s,y)| \leq C(|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma).$$

鍵となる評価 $\sigma = n(\alpha - 1) + 2$

$$\|u(t)\|_{\dot{C}^\gamma} = O(t^{-\frac{n}{\sigma}(1+\gamma)}), \quad t \to \infty.$$