不均一な拡散を持つ非線形 Fokker-Planck 方程式に対するエントロピー消散法

Yekaterina Epshteyn (The University of Utah)
Chun Liu (Illinois Institute of Technology)
水野 将司 (日本大学理工学部)[*1]

次の周期境界条件を課した偏微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - \operatorname{div}(f\nabla(D(x)\log f + \phi(x))) = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ f(x,0) = f_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{NFP}$$

ここで，$\Omega = [0,1)^n$ は n 次元トーラス，$D : \Omega \to \mathbb{R}$ は与えられた正値周期関数，$\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ は与えられた周期関数，$f_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ は与えられた確率密度関数であり，$f : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は未知関数である．本研究の目的は，f の時刻無限大での漸近挙動を解析することである．以下，D, ϕ, f_0 は Ω 上の滑らかな関数とする．

D が定数のとき，(NFP) は，次の確率微分方程式

$$dx = \phi\, dt + D\, dB \tag{SDE}$$

に対する確率密度関数がみたす Fokker-Planck 方程式として知られている．ここで，B はブラウン運動である．このとき $\operatorname{div}(f\nabla(D\log f)) = D\Delta f$ に注意すると，(NFP) は線形の方程式である．さらにエネルギー等式

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (Df(\log f - 1) + f\phi)\, dx = -\int_\Omega |\nabla(D\log f + \phi)|^2 f\, dx \tag{EI}$$

が成り立つ．特に，(NFP) の時刻無限大における漸近系の候補として，$\nabla(D\log f + \phi) = 0$ をみたす関数 f^{eq} を考えることができる．他方，D が定数でないとき，伊藤積分や Stratonovich 積分によって (SDE) のブラウン運動を定式化できるが，(SDE) に対応する確率密度関数がみたす Fokker-Planck 方程式はエネルギー等式 (EI) をみたさない．そこで，エネルギー等式 (EI) と連続の方程式を基礎にしたときに，どのような偏微分方程式であるべきかを考えてみると，(NFP) が得られる．

$$\operatorname{div}(f\nabla(D(x)\log f)) = D(x)\Delta f + \operatorname{div}(f\log f\nabla D(x))$$

となることから，(NFP) は非線形方程式となることに注意しておく．

[*1] 〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14
e-mail: `mizuno.masashi@nihon-u.ac.jp`
web: `http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~mizuno`

本研究は科研費 (課題番号:JP22K03376, JP23H00085) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 35K55
キーワード：非線形 Fokker-Planck 方程式，エントロピー消散法，エネルギー等式

D が定数のときに f の長時間挙動を調べるためには，エントロピー消散法が有効であり，多くの研究がある ([1, 2, 4, 5]). 他方で，D が x の関数であるとき，エントロピー汎関数を持つかどうかを判定することが困難となる．(NFP) はエネルギー等式 (EI) をみたすことから，エントロピー汎関数の候補として，$D(x)f(\log f - 1) + f\phi$ の積分を考えればよい．本研究では，拡散係数 D が十分に大きいときに，(NFP) の古典解 f について，(EI) の右辺が指数減衰することを示した．

定理（[3]） $n = 1, 2, 3$ とする．$\gamma > 0$ に対して，$C_1 > 0, C_2 > 0$ が存在して，

$$\min_{x\in\Omega} D(x) \geq C_1, \quad \int_\Omega |\nabla(D(x)\log f_0 + \phi)|^2 f_0\, dx \leq C_2 \tag{1}$$

ならば，定数 $C > 0$ が存在して，(NFP) の古典解 f について

$$\int_\Omega |\nabla(D(x)\log f + \phi)|^2 f\, dx \leq Ce^{-\gamma t}, \quad t > 0, \tag{2}$$

が成り立つ．

(2) から $t \to \infty$ のときに $\nabla(D(x)\log f + \phi)$ が 0 に収束すること，そして，f が平衡解 f^{eq} に収束することが示唆される．D が定数のとき，(2) に Csiszár-Kullback-Pinsker 不等式を用いることで，f が L^1 の位相で f^{eq} に収束することが示せる．

証明の方針は (EI) を t で微分して，微分不等式を導くことによる．$\boldsymbol{u} = -\nabla(D(x)\log f + \phi(x))$ と置くと，∇D を含む非積分関数を $G(\nabla D)$ とまとめて書くことにより

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega (Df(\log f - 1) + f\phi(x))\, dx \\
&= 2\int_\Omega (\nabla^2\phi(x)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})f\, dx + 2\int_\Omega D(x)|\nabla\boldsymbol{u}|^2 f\, dx + \int_\Omega G(\nabla D)\, dx \\
&\geq 2\int_\Omega (\nabla^2\phi(x)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})f\, dx + 2\int_\Omega D(x)|\nabla\boldsymbol{u}|^2 f\, dx - \frac{1}{\min D(x)}\int_\Omega D(x)\,|G(\nabla D)|\, dx
\end{aligned}$$

と書ける．C_1 を十分に大きくとることにより，$G(\nabla D)$ の積分を評価できる．$|G(\nabla D)|$ に $|\boldsymbol{u}|^3$ の項を含むため，Sobolev の不等式を使うことから次元に制約がある．

参考文献

[1] Arnold, A., Markowich, P., Toscani, G., Unterreiter, A., Comm. Partial Differential Equations, **26**(2001), 43–100.

[2] Carrillo, J. A., Toscani, G., Math. Methods Appl., **21**(1998), 1269 – -1286.

[3] Epshteyn, Y., Liu, C., and Mizuno, M., preprint, arXiv:2404.05157.

[4] Jüngel, A., *Entropy methods for diffusive partial differential equations*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, 2016.

[5] Markowich, P. A., Villani, C., Mat. Contemp., **19**(2000), 1–29.