

Mathematical modeling for grain boundary motion with dynamic lattice misorientations and triple junction drag

水野 将司 (日本大学理工学部)

結晶粒界の運動を記述する数理モデルの導出とそのモデルの数学解析は, Mullins, Herring [9, 16, 17] の研究を契機として大きく発展した. 特に, Mullins 方程式と呼ばれる, 粒界の曲率をとり入れた方程式は, 平均曲率流, 曲線短縮流方程式を典型例に持つこともあり非線形解析, 幾何学的変分問題との関係もあいまって, 深い研究が進んでいる. ところで, 結晶粒界の問題にたちかえったとき, その運動を決定する因子は結晶粒界の形状のみならず, 粒界を構成する結晶の性質や結晶粒界間の相互作用も考えるべきである. しかしながら, Mullins 方程式の持つ曲率の非線形性の解析が困難であること, 曲率の効果が粒界の運動において支配的であると考えられていたことから, それらの効果を数学的に, 論理的に整合性のある方法で (consistent な方法で) 研究されてはいないように思われる. 本稿では, [7, 8, 15] の結果をもとに, 粒界における結晶格子方位差 (lattice misorientation) と三重点 (triple junction) の影響を取り入れた, 発展方程式の変分原理を用いた導出手法とその数学解析について述べる.

1. 発展方程式の導出

本節では, 平面上の結晶粒界の運動を記述することを考える. 結晶粒界エネルギーをもとにして, エネルギーが消散することを課したときの結晶格子方位差と三重点の効果を取り入れた発展方程式の導出を行う.

3つの結晶粒界のそれぞれの端点の1つが三重点を形成していることを仮定する (図 1). 結晶粒界エネルギーを

$$(1) \quad E(\Gamma_t^{(j)}, \Delta^{(j)}\alpha; t) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_t^{(j)}} \sigma(\Delta^{(j)}\alpha) d\mathcal{H}^1 = \sum_{j=1}^3 \sigma(\Delta^{(j)}\alpha) |\Gamma_t^{(j)}|$$

で与える. $\Gamma_t^{(j)}$ は結晶粒界を表し, 固定点 $x^{(j)}$ と三重点 $a(t)$ を端点に持つとする. \mathcal{H}^1 は1次元 Hausdorff 測度, $|\Gamma_t^{(j)}|$ は $\Gamma_t^{(j)}$ の長さとする. $\alpha^{(j)}(t)$ は, 結晶の格子方位の角度を表す, t を独立変数とするスカラー値関数とし, $\Delta^{(j)}\alpha(t) = \alpha^{(j-1)}(t) - \alpha^{(j)}(t)$ は結晶粒界を構成する結晶の格子方位の差を表すものとする. ただし, $\alpha^{(0)} = \alpha^{(3)}$ と定める. $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は表面張力を表し, 格子方位

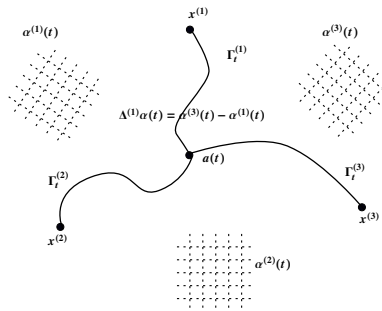


図 1. 結晶粒界の模式図

本講演の内容は, Yekaterina Epshteyn (The University of Utah), Chun Liu (Illinois Institute of Technology), 高棹 圭介氏 (京都大学理学研究科) との共同研究に基づく.

差に依存する非負の関数とする. この設定のもとで, エネルギーが消散する, すなわち $\frac{dE}{dt} \leq 0$ がみたされるような $\Gamma_t^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, \mathbf{a} の発展方程式を導出しよう.

注意 1. 表面張力 σ は $\Gamma_t^{(j)}$ の法方向 $\mathbf{n}^{(j)}$ に依存してもよい. このとき, 曲率の影響が異方的となる結晶粒界の問題となる. 本稿では簡単のため, σ が $\mathbf{n}^{(j)}$ に依存しない, すなわち, 曲率の効果が等方的な問題のみ扱う. 異方性を持つ方程式の導出については, [8, Section 2] をみよ.

注意 2. 方程式をたてるときは, 何が未知で何が既知であるかは本質的ではないが, とりあえず, 本節では $\mathbf{x}^{(j)}$, σ は既知, $\Gamma_t^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, \mathbf{a} は未知と考えてよい. ただし, 応用上は $\Gamma_t^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$, \mathbf{a} を与えて, σ や $\mathbf{x}^{(j)}$ の条件を求めることも重要である. 実験結果から, σ や $\mathbf{x}^{(j)}$ がどうあるべきかを求めることも必要だからである.

エネルギー E が消散する方程式系を導出するために, E の消散レート $\frac{dE}{dt}$ を計算する. 結晶粒界 $\Gamma_t^{(j)}$ を $\Gamma_t^{(j)} : \xi^{(j)}(s, t)$, $(0 \leq s \leq 1)$, $\xi^{(j)}(1, t) = \mathbf{a}(t)$, $\xi^{(j)}(0, t) = \mathbf{x}^{(j)}$ と媒介変数表示する. ただし, s は弧長パラメータではないことに注意する. $d\mathcal{H}^1|_{\Gamma_t^{(j)}} = |\xi_s^{(j)}(s, t)| ds$ だから

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \sigma(\Delta^{(j)} \alpha(t)) \int_0^1 |\xi_s^{(j)}(s, t)| ds \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\sigma(\Delta^{(j)} \alpha(t)) \int_0^1 \frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \cdot \xi_{st}^{(j)}(s, t) ds + \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j)}| (\Delta^{(j)} \alpha(t))_t \right) \end{aligned}$$

となる. 部分積分により

$$\int_0^1 \frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \cdot \xi_{st}^{(j)}(s, t) ds = - \int_0^1 \left(\frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \right)_s \cdot \xi_t^{(j)}(s, t) ds + \left[\frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \cdot \xi_t^{(j)}(s, t) \right]_{s=0}^1$$

が得られる. $\xi_s^{(j)}$ が $\Gamma_t^{(j)}$ の接ベクトル場になることから Frenet-Serret の公式より

$$\left(\frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \right)_s = \kappa^{(j)}(s, t) \mathbf{n}^{(j)}(s, t), \quad \mathbf{n}^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_s^{(j)}$$

である. $\Gamma_t^{(j)}$ の法速度 $v_n^{(j)}$ は $v_n^{(j)} = \xi_t^{(j)} \cdot \mathbf{n}^{(j)} / |\mathbf{n}^{(j)}|$ で与えられることから

$$(3) \quad \int_0^1 \left(\frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \right)_s \cdot \xi_t^{(j)}(s, t) ds = \int_0^1 \kappa^{(j)}(s, t) v_n^{(j)}(s, t) |\mathbf{n}^{(j)}(s, t)| ds = \int_{\Gamma_t^{(j)}} \kappa^{(j)} v_n^{(j)} d\mathcal{H}^1$$

となる. 他方, $\xi^{(j)}(1, t) = \mathbf{a}(t)$, $\xi^{(j)}(0, t) = \mathbf{x}^{(j)}$ となるから

$$(4) \quad \left[\frac{\xi_s^{(j)}(s, t)}{|\xi_s^{(j)}(s, t)|} \cdot \xi_t^{(j)}(s, t) \right]_{s=0}^1 = \frac{\xi_s^{(j)}(1, t)}{|\xi_s^{(j)}(1, t)|} \cdot \mathbf{a}_t(t)$$

となる. 次に

$$(5) \quad \sum_{j=1}^3 \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j)}| (\Delta^{(j)} \alpha(t))_t = \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta^{(j+1)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j)}| \right) \alpha_t^{(j)}(t)$$

と変形する. (2)に (3), (4) と (5) を代入すると

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_t^{(j)}} \sigma(\Delta^{(j)} \alpha(t)) \kappa^{(j)} v_n^{(j)} d\mathcal{H}^1 + \sum_{j=1}^3 \frac{\xi_s^{(j)}(1, t)}{|\xi_s^{(j)}(1, t)|} \cdot \mathbf{a}_t(t) \\ & + \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta^{(j+1)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j)}| \right) \alpha_t^{(j)}(t) \end{aligned}$$

が得られる. 従って, エネルギー (1) が消散することを保証するためには, 正定数 $\mu, \gamma, \eta > 0$ を用いて

$$(7) \quad \begin{cases} v_n^{(j)} = \mu \sigma(\Delta^{(j)} \alpha) \kappa^{(j)}, & \text{on } \Gamma_t^{(j)}, t > 0, \quad j = 1, 2, 3, \\ \alpha_t^{(j)} = -\gamma \left(\sigma'(\Delta^{(j+1)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha(t)) |\Gamma_t^{(j)}| \right), & j = 1, 2, 3, \\ \mathbf{a}_t = -\eta \sum_{j=1}^3 \frac{\xi_s^{(j)}(1, t)}{|\xi_s^{(j)}(1, t)|}, & t > 0 \end{cases}$$

とすればよい. 逆にこの方程式系 (7) を課せばエネルギー消散評価式

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_t^{(j)}} |v_n^{(j)}|^2 d\mathcal{H}^1 - \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^3 |\alpha_t^{(j)}(t)|^2 - \frac{1}{\eta} |\mathbf{a}_t(t)|^2$$

が得られる.

注意 3. 上記による方程式の導出手法は最大消散原理, Onsager の原理と呼ばれている [2, 18].

エネルギー (1) の平衡状態をみるために $(\Gamma^{(j)}, \alpha)$ がエネルギー最小であるとする. $\Gamma^{(j)} : \xi^{(j)}(s)$, $(0 \leq s \leq 1)$, $\xi^{(j)}(1) = \mathbf{a}$, $\xi^{(j)}(0) = \mathbf{x}^{(j)}$ と媒介変数表示する. $\phi^{(j)}(0) = \mathbf{0}$ をみたす滑らかなベクトル場 $\phi^{(j)}(s) \in \mathbb{R}^2$ と $\psi = (\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} \sum_{j=1}^3 \int_0^1 \sigma(\Delta^{(j)} \alpha + \varepsilon_2 \Delta^{(j)} \psi) |\xi_s^{(j)}(s) + \varepsilon_1 \phi_s^{(j)}(s)| ds = 0$$

を考える. すると (8) の右辺は先と同じような計算により,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta^{(j)} \alpha) (\psi^{(j-1)} - \psi^{(j)}) |\Gamma_t^{(j)}| + \int_0^1 \sigma(\Delta^{(j)} \alpha) \frac{\xi_s^{(j)}(s)}{|\xi_s^{(j)}(s)|} \cdot \phi_s^{(j)} ds \right) \\ = & \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta^{(j+1)} \alpha) |\Gamma_t^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha) |\Gamma_t^{(j)}| \right) \psi^{(j)} - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma^{(j)}} \sigma(\Delta^{(j)} \alpha) \left(\frac{\xi_s^{(j)}(s)}{|\xi_s^{(j)}(s)|} \right)_s \cdot \phi^{(j)} d\mathcal{H}^1 \\ & + \sum_{j=1}^3 \sigma(\Delta^{(j)} \alpha) \frac{\xi_s^{(j)}(1)}{|\xi_s^{(j)}(1)|} \cdot \phi^{(j)}(1) \end{aligned}$$

が得られる. $\phi^{(j)}(s), \psi$ は任意だから

$$(9) \quad \begin{cases} 0 = \sigma(\Delta^{(j)} \alpha) \kappa^{(j)}, & \text{on } \Gamma^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \\ 0 = \sigma'(\Delta^{(j+1)} \alpha) |\Gamma^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta^{(j)} \alpha) |\Gamma^{(j)}|, & j = 1, 2, 3, \\ \mathbf{0} = \sum_{j=1}^3 \frac{\xi_s^{(j)}(1)}{|\xi_s^{(j)}(1)|}, \end{cases}$$

が得られる. このことにより, (7) の第 1 式, 第 2 式はエネルギー E の勾配流とみなせる. (9) の第 3 式, 三重点における関係はエネルギーのつりあいの式であり, Herring 条件と呼ばれている. この条件はエネルギーの平衡状態を考えるときの必要条件である. しかし, 発展問題を考えるうえでは, Herring 条件は必要条件ではない. すなわち, 我々が何らかの条件を課さなければならない. [8] では, 三重点に Herring 条件ではなく, 動的条件を課す問題を提唱した. (7) で緩和極限 $\eta \rightarrow \infty$ とすれば, Herring 条件が得られることに注意する. 平均曲率流方程式に Herring 条件を課したネットワーク解の数学解析は古典解, 弱解の双方で研究が進んでいる [11, 12, 13, 14].

注意 4. 定数 $\mu, \gamma, \eta > 0$ は緩和時間パラメータといい, 系が平衡状態に近づく速さの指標となっている. このパラメータにより, 我々の系は多重スケール問題となっている.

2. 結晶格子方位差と動的三重点

結晶格子方位差と動的三重点の相互作用をみるために, 緩和極限 $\mu \rightarrow \infty$ を考えた常微分方程式系を考える. $\kappa^{(j)} = 0$ となり, $\Gamma_t^{(j)}$ は線分となるから $\xi^{(j)}(s, t) = \mathbf{x}^{(j)} + s(\mathbf{a}(t) - \mathbf{x}^{(j)})$ と表示すると

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_t^{(j)} = -\gamma \left(\sigma'(\Delta^{(j+1)}\alpha(t)) |\mathbf{a}(t) - \mathbf{x}^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta^{(j)}\alpha(t)) |\mathbf{a}(t) - \mathbf{x}^{(j)}| \right), & j = 1, 2, 3, \\ \mathbf{a}_t = -\eta \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{x}^{(j)}}{|\mathbf{a}(t) - \mathbf{x}^{(j)}|}, & t > 0 \end{cases}$$

が得られる. この常微分方程式により定まる結晶粒界モデルの適切性, 長時間挙動を考察する.

2.1. 適切性. この節では, 系の時間局所適切性を示す. 常微分方程式の解の存在定理によれば, (10) の時間局所解の存在がわかる. しかし, \mathbf{a} が三重点であることを示すためには, \mathbf{a} が $\mathbf{x}^{(j)}$ から作られる三角形の内側にあることなど, \mathbf{a} の位置に対する先験評価も必要である. このことを踏まえて以下の仮定をおく.

$$(11) \quad \left| \sum_{j=1, i \neq j}^3 \frac{\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}}{|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{(i)}|} \right| > 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

この仮定 (11) のもと, $f(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^3 |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(i)}|$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$) は最小値を持ち, 最小値を達成する点 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{FT}}$ は唯一つであり, \mathbf{a}_{FT} はどの $\mathbf{x}^{(i)}$ とも等しくなく,

$$\nabla f(\mathbf{a}_{\text{FT}}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(i)}}{|\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(i)}|} = \mathbf{0}$$

をみます.

注意 5. 一般に $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $f(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^N |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(i)}|$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$) の最小値を達成する点を Fermat-Torricelli 点という [1].

表面張力 σ は C^3 級で,

- (1) (正值性) 正定数 $C_1 > 0$ が存在して $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma(\theta) \geq C_1$;
- (2) (凸性) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\theta \sigma'(\theta) \geq 0$;
- (3) $\sigma'(\theta) = 0$ と $\theta = 0$ は同値

を仮定する. この仮定のもとで, σ は $\theta = 0$ で最小となることに注意する.

Fermat-Torricelli 点の近くに \mathbf{a} がある限り, その \mathbf{a} は三重点となる. このことにより, Fermat-Torricelli 点を原点とみたとて, 次の存在定理を得る.

定理 6 (局所存在定理 [8, Theorem 4.1, Theorem 6.3]). $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_0^{(j)} \in \mathbb{R}$ は (11) と

$$(12) \quad |\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{\text{FT}}| < \frac{1}{2} |\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}|$$

をみたすとする. このとき (10) に初期条件 $\alpha^{(j)}(0) = \alpha_0^{(j)}$, $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0$ を与えた初期値問題の時間局所解が唯一存在する.

証明のアイデアは, (10) を積分方程式に書き換えて

$$X_T := \left\{ (\alpha^{(j)}, \mathbf{a}) \in C([0, T]) : \sup_{0 \leq t \leq T} |\alpha^{(j)}(t)| \leq C, \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\text{FT}}| \leq C \right\}$$

上で縮小写像を構成することである. 一意性は Lipschitz 連続性と Gronwall 不等式による. 詳細は [8] をみよ.

2.2. 解の性質. この節では, 解の先験評価について述べる. まず, 導出の方法からエネルギー消散が得られる.

命題 7 (エネルギー消散 [8, Proposition 5.1]). $(\alpha^{(j)}, \mathbf{a})$ を $0 \leq t \leq T$ 上の (10) の解とする. このとき, $0 \leq t \leq T$ に対して, 次が成り立つ:

$$E(t) + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^3 \int_0^t \left| \frac{d\alpha^{(j)}}{dt}(\tau) \right|^2 d\tau + \frac{1}{\eta} \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{a}}{dt}(\tau) \right|^2 d\tau = E(0).$$

次に σ の凸性を用いて, 結晶格子方位 $\alpha^{(j)}$, 結晶格子方位差 $\Delta^{(j)}\alpha$ に対する最大値原理を述べる.

命題 8 (結晶格子方位に対する最大値原理 [8, Proposition 5.3]). $(\alpha^{(j)}, \mathbf{a})$ を $0 \leq t \leq T$ 上の (10) の解とする. このとき, $0 \leq t \leq T$ に対して, 次が成り立つ:

$$(13) \quad \sum_{j=1}^3 |\alpha^{(j)}(t)|^2 + 2\gamma \sum_{j=1}^3 \int_0^t \left(\sigma'(\Delta\alpha^{(j)}(\tau)) |\mathbf{a}(\tau) - \mathbf{x}^{(j)}| \right) \Delta\alpha^{(j)}(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^3 |\alpha_0^{(j)}|^2.$$

証明. (10) の第一式に $\alpha^{(j)}$ をかけて, $j = 1, 2, 3$ について和をとると, $\Delta^{(j)}\alpha = \alpha^{(j-1)} - \alpha^{(j)}$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^3 |\alpha^{(j)}|^2 \right) &= -\gamma \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta\alpha^{(j+1)}) |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(j+1)}| - \sigma'(\Delta\alpha^{(j)}) |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(j)}| \right) \alpha^{(j)} \\ &= -\gamma \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta\alpha^{(j)}) |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(j)}| \right) (\alpha^{(j-1)} - \alpha^{(j)}) \\ &= -\gamma \sum_{j=1}^3 \left(\sigma'(\Delta\alpha^{(j)}) |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(j)}| \right) \Delta\alpha^{(j)} \end{aligned}$$

を得る. 両辺 t で積分することにより, (13) を得る. □

注意 9. σ の凸性の仮定 $\theta\sigma'(\theta) \geq 0$ を用いると

$$(14) \quad \sum_{j=1}^3 |\alpha^{(j)}(t)|^2 \leq \sum_{j=1}^3 |\alpha_0^{(j)}|^2$$

が得られる. すなわち, 結晶格子方位の上からの評価が得られる.

結晶格子方位 $\alpha^{(j)}$ に対する最大値原理と同様に, 結晶格子方位差 $\Delta^{(j)}\alpha$ に対する最大値原理も得られる. 証明は [8] をみよ.

命題 10 (結晶格子方位差に対する最大値原理 [8, Proposition 5.4]). $(\alpha^{(j)}, \mathbf{a})$ を $0 \leq t \leq T$ 上の (10) の解とする. このとき, $0 \leq t \leq T$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^3 (\Delta^{(j)}\alpha(t))^2 + 6\gamma \sum_{j=1}^3 \int_0^t \sigma_\theta(\Delta^{(j)}\alpha(\tau)) |\mathbf{a}(\tau) - \mathbf{x}^{(j)}| \Delta^{(j)}\alpha(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^3 (\Delta^{(j)}\alpha(0))^2.$$

次に三重点についての先験評価を示す. そのために

$$(15) \quad C_2 := \inf \left\{ \sum_{j=1}^3 |\mathbf{a} - \mathbf{x}^{(j)}| : j = 1, 2, 3 \text{ が存在して } |\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{FT}}| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}| \right\}$$

とおく. \mathbf{a}_{FT} が連続関数 $f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^3 |\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{a}|$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$) の最小値を達成する点だから

$$0 < \sum_{j=1}^3 |\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}| = f(\mathbf{a}_{\text{FT}}) < C_2$$

となる. この定数 C_2 を用いると, 三重点 \mathbf{a} の先験評価が得られる.

命題 11 (三重点の有界性 [7, Lemma 4.1]). 初期値 $(\alpha_0^{(j)}, \mathbf{a}_0)$ は

$$(16) \quad E(0) = \sum_{j=1}^3 \sigma(\Delta^{(j)}\alpha_0) |\mathbf{a}_0 - \mathbf{x}^{(j)}| < \sigma(0)C_2$$

をみたすとする. $(\alpha^{(j)}, \mathbf{a})$ を $0 \leq t \leq T$ 上の (10) の解とする. このとき, $0 \leq t \leq T$ と $j = 1, 2, 3$ に対して, 次が成り立つ:

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\text{FT}}| < \frac{1}{2} |\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}|.$$

証明. 背理法で示す. $0 \leq t_1 \leq T$ と $j = 1, 2, 3$ が存在して $|\mathbf{a}(t_1) - \mathbf{a}_{\text{FT}}| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}|$ をみたすとする. すると, σ が $\theta = 0$ で最小になること, (15), 命題 7 (エネルギー消散) より

$$C_2 \leq \sum_{j=1}^3 |\mathbf{a}(t_1) - \mathbf{x}^{(j)}| \leq \frac{1}{\sigma(0)} \sum_{j=1}^3 \sigma(\Delta^{(j)}\alpha_0) |\mathbf{a}_0 - \mathbf{x}^{(j)}| = \frac{1}{\sigma(0)} E(0)$$

となり (16) に矛盾する. □

注意 12. (16) を仮定すると

$$\sum_{j=1}^3 |\mathbf{a}_0 - \mathbf{x}^{(j)}| \leq \frac{1}{\sigma(0)} \sum_{j=1}^3 \sigma(\Delta^{(j)}\alpha_0) |\mathbf{a}_0 - \mathbf{x}^{(j)}| < C_2$$

となるから, $|\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{\text{FT}}| < \frac{1}{2} |\mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}|$ がすべての $j = 1, 2, 3$ について成り立つ. 従って, 時間局所解の存在の仮定 (12) は自動的にみたされる.

2.3. 時間大域解と長時間挙動. 結晶格子方位差と三重点に対する先験評価により, 解の大域存在を示すことができる.

定理 13 (時間大域解 [7, Theorem 4.1]). $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^2, \alpha_0^{(j)} \in \mathbb{R}^3$ は (11) と (12), (16) をみたすとする. このとき (10) に初期条件 $\alpha^{(j)}(0) = \alpha_0^{(j)}, \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0$ を与えた初期値問題の時間大域解が唯一つ存在する.

次に, 三重点 \mathbf{a} と結晶格子方位 $\alpha^{(j)}$ の長時間挙動を調べる. $\alpha^{(j)}$ には束縛条件

$$(17) \quad \frac{d}{dt}(\alpha^{(1)}(t) + \alpha^{(2)}(t) + \alpha^{(3)}(t)) = 0$$

があるので, 結晶格子方位差の消散評価とくみあわせると

$$\alpha^{(j)}(t) \rightarrow \alpha_\infty = \frac{\alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(2)} + \alpha_0^{(3)}}{3}, \quad t \rightarrow \infty$$

となることが推測できる. このとき, $\Delta^{(j)}\alpha_\infty = 0$ だから, 三重点は, $\mathbf{x}^{(j)}$ から定まる Fermat-Torricelli 点に収束する. すなわち,

$$\mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{a}_{\text{FT}}, \quad t \rightarrow \infty$$

となることが予想できる. この予想は三重点の初期状態が \mathbf{a}_{FT} に近いときに正しい. すなわち, 次の指数安定性が得られる.

定理 14 ([7, Theorem 5.1]). 正定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, もし, $\sum_{j=1}^3 |\alpha_0^{(j)} - \alpha_\infty| + |\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{\text{FT}}| < \varepsilon$ ならば, 正定数 $C_3, \lambda > 0$ が存在して, 対応する (10) の大域解 $(\alpha^{(j)}, \mathbf{a})$ は十分大きな $t > 0$ に対して

$$(18) \quad \sum_{j=1}^3 |\alpha^{(j)}(t) - \alpha_\infty^{(j)}| + |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\text{FT}}| \leq C_3 e^{-\lambda t}$$

をみたす.

証明は方程式 (10) の右辺の線形化作用素の固有値を解析することによる. (10) の $(\alpha_\infty^{(j)}, \mathbf{a}_{\text{FT}})$ まわりの線形化問題は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_L}{dt} = -\gamma\sigma''(0)\mathbb{B}_\infty\alpha_L, \quad \mathbb{B}_\infty = \begin{pmatrix} |\mathbf{b}_\infty^{(1)}| + |\mathbf{b}_\infty^{(2)}| & -|\mathbf{b}_\infty^{(2)}| & -|\mathbf{b}_\infty^{(1)}| \\ -|\mathbf{b}_\infty^{(2)}| & |\mathbf{b}_\infty^{(2)}| + |\mathbf{b}_\infty^{(3)}| & -|\mathbf{b}_\infty^{(3)}| \\ -|\mathbf{b}_\infty^{(1)}| & -|\mathbf{b}_\infty^{(3)}| & |\mathbf{b}_\infty^{(3)}| + |\mathbf{b}_\infty^{(1)}| \end{pmatrix}, \\ \frac{d\mathbf{a}_L}{dt} = -\eta\sigma(0) \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{|\mathbf{b}_\infty^{(j)}|} \left(I - \frac{\mathbf{b}_\infty^{(j)}}{|\mathbf{b}_\infty^{(j)}|} \otimes \frac{\mathbf{b}_\infty^{(j)}}{|\mathbf{b}_\infty^{(j)}|} \right) \right) \mathbf{a}_L =: -\eta\sigma(0)L_a\mathbf{a}_L, \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{b}_\infty^{(j)}}{|\mathbf{b}_\infty^{(j)}|} = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

となる. ただし, $\mathbf{b}_\infty^{(j)} = \mathbf{a}_{\text{FT}} - \mathbf{x}^{(j)}$ であり, \otimes はベクトルのテンソル積である. L_a は正定値であることに對して, \mathbb{B}_∞ は半正定値であり, 退化している, すなわち 0 固有値を持つことに注意する. この固有値は束縛条件 (17) によるものであり, 解 $\alpha^{(j)}$ に対して

$$(\alpha^{(1)}(t), \alpha^{(2)}(t), \alpha^{(3)}(t)) - \alpha_\infty(1, 1, 1) \in (\text{Ker } \mathbb{B}_\infty)^\perp = \langle (1, 1, 1) \rangle^\perp$$

が成り立つ. 従って, $\alpha_p^{(j)}(t) := \alpha^{(j)}(t) - \alpha_\infty$ とおくと $\alpha_p^{(j)}(t)$ に対する指数減衰を得ることができて, (18) を得ることができる. 詳細は [7] をみよ.

3. 曲率流方程式と結晶格子方位差

本節では、曲率と結晶格子方位差の関係をグラフ解をもとに調べる。結晶粒界 Γ_t は $\Gamma_t := \{(x, u(x, t)) : 0 < x < 1\}$ と $u(x, t)$ でグラフ表示されているとする。結晶粒界エネルギー E を

$$E := \int_{\Gamma_t} \sigma(\Delta\alpha(t)) d\mathcal{H}^1 = \sigma(\Delta\alpha(t)) |\Gamma_t|$$

で定める。 Γ_t に周期境界条件を課して、最大消散原理を用いると

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{u_t}{\sqrt{1+|u_x|^2}} = \mu\sigma(\Delta\alpha) \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+|u_x|^2}} \right)_x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ \alpha_t = -\gamma\sigma_\alpha(\alpha) |\Gamma_t|, & t > 0 \end{cases}$$

なる曲率流方程式が得られる。この曲率流方程式を解析することにより、結晶粒界の運動における曲率と結晶格子方位差の関係を調べる。

以下、表面張力 σ は $C^{1,1}$ 級で、

- (1) (正值性) 正定数 $C_1 > 0$ が存在して $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\sigma(\theta) \geq C_1$;
- (2) (凸性) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\theta\sigma'(\theta) \geq 0$;
- (3) $\sigma'(\theta) = 0$ と $\theta = 0$ は同値

を仮定する。

3.1. 適切性. (19) の初期値-周期境界値問題に対する可解性について述べる。

定理 15 ([15, Theorem 4.5]). 初期値 u_0 を周期境界条件をみたす $[0, 1)$ 上の Lipschitz 関数, $\Delta\alpha_0 \in \mathbb{R}$ を定数とする。すると, $\varepsilon > 0$ と $0 < \beta < 1$ に対して, 初期条件 $(u(\cdot, 0), \Delta\alpha(0)) = (u_0, \Delta\alpha_0)$ をみたす (19) の一意解 $(u, \Delta\alpha) \in (C(\overline{[0, 1) \times [0, \infty)}) \cap C^{2,\beta}([0, 1) \times (\varepsilon, \infty))) \times (C([0, \infty)) \cap C^{1,1}(\varepsilon, \infty))$ が存在する。

証明の方針は, u を固定した常微分方程式の解を $(\Delta\alpha)_u$ とおくときに

$$\frac{u_t}{\sqrt{1+|u_x|^2}} = \mu\sigma((\Delta\alpha)_u) \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+|u_x|^2}} \right)_x$$

に対する先験評価を構成し, 適切な関数空間上での固定点を探す問題に帰着させることである。この先験評価において, 解 u の勾配評価を導くことが鍵となる。 $\sigma \equiv 1$ のとき, 後ろ向き熱核を用いた Huisken の単調性公式が知られており, 単調性公式から勾配評価を導くことができる [3, 4, 5, 6, 10]. (19) は時間依存するモビリティを持つため, 通常の後向き熱核では単調性公式を導くことができない。そこで,

$$(20) \quad \rho(X, t) := \frac{1}{(4\pi(\Sigma(t_0) - \Sigma(t)))^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|X - X_0|^2}{4(\Sigma(t_0) - \Sigma(t))}\right), \quad 0 < t < t_0, \quad X \in \mathbb{R}^2,$$

とおく。ただし,

$$(21) \quad \Sigma(t) := \mu \int_0^t \sigma(\Delta\alpha(\tau)) d\tau$$

である。

注意 16. 熱伝導率が $t > 0$ に依存する熱方程式

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k'(t)\Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0,$$

を考える. 変数変換 $s = k(t)$ を考えると

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x, s) = \Delta u(x, s) \quad x \in \mathbb{R}^d, s > 0.$$

となるから, (22) の基本解は

$$\frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4s}\right) = \frac{1}{(4\pi k(t))^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4k(t)}\right)$$

で与えられる. (21) を用いたのは $k = \Sigma$ とおいたことによる.

(20) で定義される ρ は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \mu\sigma(\Delta\alpha(t))\Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0,$$

の 1 次元後ろ向き熱核となっていることに注意する. この ρ を用いて次の単調性公式を得た. 定理を述べるために記号を準備する.

連続微分可能な関数 $f := f(x, y, t) : [0, 1] \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ が admissible であるとは, 任意の $y \in \mathbb{R}$ と $t \geq 0$ に対して, $f(0, y, t) = f(1, y, t)$ と $f_x(0, y, t) = f_x(1, y, t)$ が成り立つことをいう. (19) の解 u に対して, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+|u_x|^2}}(-u_x, 1)$ をグラフ Γ_t の上向きの単位法線ベクトル, $\kappa = \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+|u_x|^2}}\right)_x$ をグラフ Γ_t の曲率とする.

定理 17 ([15, Theorem 3.1]). $(u, \Delta\alpha)$ を (19) の解とする. このとき, 任意の $X_0 \in \mathbb{R}^2$ と $t_0 > 0$, admissible な関数 $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$(23) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} f \rho \sigma(\Delta\alpha(t)) d\mathcal{H}^1 \\ &= \int_{\Gamma_t} (f_t - \mu\sigma(\Delta\alpha(t))\Delta_{\Gamma_t} f + \mu\sigma(\Delta\alpha(t))\kappa(Df \cdot \mathbf{n})) \rho \sigma(\Delta\alpha(t)) d\mathcal{H}^1 \\ & \quad - \mu\sigma(\Delta\alpha(t)) \int_{\Gamma_t} \left(f \rho \left(-\kappa + \frac{D\rho \cdot \mathbf{n}}{\rho} \right)^2 \sigma(\Delta\alpha(t)) \right) d\mathcal{H}^1 - \frac{1}{\gamma|\Gamma_t|} \int_{\Gamma_t} f \rho (\Delta\alpha)_t^2 d\mathcal{H}^1 \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\rho = \rho_{(X_0, t_0)}$ は (20) で与えられた後ろ向き熱核である.

(23) は Γ_t に対する単調性公式という. (23) の右辺第 2 項と第 3 項は非正だから, 第 1 項が非正であることがわかれば, $f \rho \sigma(\Delta\alpha(t))$ の積分の時間変数に関する単調性が得られる. このときに, ρ が (20) で与えられた後ろ向き熱核であることから, $t \rightarrow t_0$ としたときに, $f(X_0, t_0)\sigma(\Delta\alpha(t_0))$ の評価が得られる.

$v = \sqrt{1+u_x^2}$ は admissible な関数となるため, 定理 17 で $f = v$ とおけば

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_t} v \rho \sigma(\Delta\alpha(t)) \leq \int_{\Gamma_t} (v_t - \mu\sigma(\Delta\alpha(t))\Delta_{\Gamma_t} v + \mu\sigma(\Delta\alpha(t))\kappa(Dv \cdot \mathbf{n})) \rho \sigma(\Delta\alpha(t))$$

が得られる. v に対して直接計算により

$$v_t - \mu\sigma\Delta_{\Gamma_t} v + \mu\sigma(Dv \cdot \kappa) = -\mu\sigma v \kappa^2 - 2\mu\sigma \frac{v_x^2}{v^3}$$

となるから, (24) で $t \rightarrow t_0$ とすると, 次が得られる. 証明の詳細は [15] をみよ.

定理 18 ([15, Theorem 4.2]). $(u, \Delta\alpha)$ を (19) の解とし, $v := \sqrt{1+u_x^2}$ とおく. このとき, 任意の $0 < x_0 < 1$ と $t_0 > 0$ に対して次が成り立つ:

$$v(x_0, t_0) \leq \frac{\sigma(\Delta\alpha(0))}{C_1} \sup_{0 < x < 1} v^2(x, 0).$$

3.2. 長時間挙動. 最後に (19) の大域解に対する長時間挙動について述べる. 平滑化効果により, 初期値 u_0 は十分に滑らかであると仮定してよい.

定理 19 ([15, Theorem 5.1]). 初期値 u_0 を周期境界条件をみたす $[0, 1)$ 上の Lipschitz 関数, $\Delta\alpha_0 \in \mathbb{R}$ を定数とする. $(u, \Delta\alpha)$ を初期条件 $(u(\cdot, 0), \Delta\alpha(0)) = (u_0, \Delta\alpha_0)$ をみたす (19) の大域解とする. このとき, ある定数 u_∞ が存在して, $\|u_\infty - u\|_{C^2([0,1])}$ は 0 に指数減衰する. さらに, 曲率 κ も $[0, 1)$ 上に 0 へ指数減衰する.

定理 19 を証明するために, (19) に対するエネルギー減衰評価を導く.

命題 20 ([15, Proposition 5.2]). $(u, \Delta\alpha)$ を (19) の解とするとき, 次が成り立つ:

$$(25) \quad \frac{d}{dt} |\Gamma_t| + \mu\sigma(\Delta\alpha(t)) \int_{\Gamma_t} \kappa^2 = 0,$$

ただし, $\kappa = \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \right)_x$ は Γ_t の曲率である.

この評価は, 方程式の導出方法から自明に得られる. 証明は [15] をみよ. (25) を両辺 t で積分して, 曲率の二乗の非負値性を使えば, 次が得られる.

系 21 ([15, Corollary 5.2]). $(u, \Delta\alpha)$ を (19) の解とすると, $t > 0$ に対して, $|\Gamma_t| \leq |\Gamma_0|$ が成り立つ.

(25) の曲率の時空積分が有界となることから次が得られる.

系 22 ([15, Corollary 5.3]). $(u, \Delta\alpha)$ を (19) の解とする. このとき, 部分列 $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ が存在して, $t_j \rightarrow \infty$ かつ

$$\kappa(x, t_j) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty$$

がほとんどすべての $x \in (0, 1)$ について成り立つ.

さらなる長時間挙動の解析のために, 高階エネルギー評価を用いる. $(u, \Delta\alpha)$ が (19) の古典解ならば,

$$u_t = \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1+|u_x|^2} u_{xx}.$$

となるので, x について微分すれば

$$(26) \quad \begin{aligned} u_{xt} &= \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1+|u_x|^2} u_{xxx} - \frac{2\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^2} u_x u_{xx}^2, \\ u_{xxt} &= \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1+|u_x|^2} u_{xxxx} - \frac{6\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^2} u_x u_{xx} u_{xxx} - \frac{2\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^2} u_{xx}^3 + \frac{8\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^3} u_x^2 u_{xx}^3, \\ u_{xxx t} &= \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1+|u_x|^2} u_{xxxxx} - \frac{8\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^2} u_x u_{xx} u_{xxx} - \frac{12\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^2} u_{xx}^2 u_{xxx} - \frac{6\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^2} u_x u_{xxx}^2 \\ &\quad + \frac{48\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^3} u_x^2 u_{xx}^2 u_{xxx} + \frac{24\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^3} u_x u_{xx}^4 - \frac{48\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1+|u_x|^2)^4} u_x^3 u_{xx}^4 \end{aligned}$$

が得られる.

命題 23 ([15, Proposition 5.6]). $(u, \Delta\alpha)$ を (19) の古典解とする. このとき, 正定数 $C_4 > 0$ が存在して

$$(27) \quad \int_0^1 |u_x(x, t)|^2 dx \leq e^{-C_4 t} \int_0^1 |u_{0x}(x)|^2 dx$$

が $t > 0$ に対して成り立つ.

証明. (27) の左辺を t について微分して, (26) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x(x, t)|^2 dx &= 2 \int_0^1 u_x(x, t) u_{xt}(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1 + |u_x|^2} u_x u_{xxx} dx - 4 \int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1 + |u_x|^2)^2} u_x^2 u_{xx}^2 dx \end{aligned}$$

となる. 部分積分により

$$\int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1 + |u_x|^2} u_x u_{xxx} dx = - \int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1 + |u_x|^2} u_{xx}^2 dx + 2 \int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{(1 + |u_x|^2)^2} u_x^2 u_{xx}^2 dx$$

だから

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x(x, t)|^2 dx = -2 \int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1 + |u_x|^2} u_{xx}^2 dx.$$

となる. σ の正值性, 定理 18 と Poincaré 不等式を組み合わせると, 定数 $C_5 > 0$ が存在して

$$\int_0^1 \frac{\mu\sigma(\Delta\alpha)}{1 + |u_x|^2} u_{xx}^2 dx \geq C_5 \int_0^1 |u_x(t, x)|^2 dx,$$

とできる. Gronwall の不等式により (27) を得る. □

命題 23 と同様の結果を u_{xx}, u_{xxx} に対して構成することで, u や κ の指数減衰を得ることができ. 詳細は [15, Section 5] をみよ.

参考文献

- [1] V. Boltyanski, H. Martini, and V. Soltan, *Geometric methods and optimization problems*, Combinatorial Optimization, vol. 4, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [2] C. M. Dafermos, *Maximal dissipation in equations of evolution*, J. Differential Equations **252** (2012), no. 1, 567–587.
- [3] K. Ecker, *Regularity theory for mean curvature flow*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 57, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [4] K. Ecker and G. Huisken, *Interior curvature estimates for hypersurfaces of prescribed mean curvature*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **6** (1989), no. 4, 251–260.
- [5] ———, *Mean curvature evolution of entire graphs*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 453–471.
- [6] ———, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. Math. **105** (1991), no. 3, 547–569.
- [7] Y. Epshteyn, C. Liu, and M. Mizuno, *Large time asymptotic behavior of grain boundaries motion with dynamic lattice misorientations and with triple junctions drag*, Commun. Math. Sci. **19** (2021), no. 5, 1403–1428. [te](#)
- [8] ———, *Motion of Grain Boundaries with Dynamic Lattice Misorientations and with Triple Junctions Drag*, SIAM J. Math. Anal. **53** (2021), no. 3, 3072–3097.
- [9] C. Herring, *Surface tension as a motivation for sintering*, Fundamental Contributions to the Continuum Theory of Evolving Phase Interfaces in Solids, Springer, 1999, pp. 33–69.
- [10] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **31** (1990), no. 1, 285–299.
- [11] L. Kim and Y. Tonegawa, *On the mean curvature flow of grain boundaries*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **67** (2017), no. 1, 43–142.
- [12] A. Magni, C. Mantegazza, and M. Novaga, *Motion by curvature of planar networks, II*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **15** (2016), 117–144.

- [13] C. Mantegazza, M. Novaga, and A. Pluda, *Lectures on curvature flow of networks*, Contemporary research in elliptic PDEs and related topics, Springer INdAM Ser., vol. 33, Springer, Cham, 2019, pp. 369–417.
- [14] C. Mantegazza, M. Novaga, and V. M. Tortorelli, *Motion by curvature of planar networks*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **3** (2004), no. 2, 235–324.
- [15] M. Mizuno and K. Takasao, *A curve shortening equation with time-dependent mobility related to grain boundary motions*, Interfaces Free Bound. **23** (2021), 169–190.
- [16] W. W. Mullins, *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*, Journal of Applied Physics **27** (1956), no. 8, 900–904.
- [17] ———, *Theory of thermal grooving*, Journal of Applied Physics **28** (1957), no. 3, 333–339.
- [18] L. Onsager, *Reciprocal relations in irreversible processes. I.*, Phys. Rev. **37** (1931), 405–426.

Email address: mizuno.masashi@nihon-u.ac.jp