Growth Estimates of Generalized Eigenfunctions to the Schrödinger Equations -the Case of Exploding Potentials-

望月　清（中央大学、都立大学）

外部領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ における Schrödinger 作用素の固有値問題

$$-\Delta_b u + c(x)u - \lambda u = 0, \quad \mathcal{B}u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

を考える。ここに $\Delta_b = \nabla_b \cdot \nabla_b$, $\nabla_b = \nabla + ib(x)$ で、$b(x) = (b_1(x), \cdots, b_n(x))$ は magnetic potential である。また、$\mathcal{B}$ は Dirichlet または Robin boundary condition を表す。以下では electric potential $c(x)$ が exploding $c(x) \to -\infty$ $(|x| \to \infty)$ の場合を考える。この時 real line $\mathbf{R}$ 全体が $-\Delta_b + c(x)$ の本質スペクトルになるが、そこに固有値が混じっているのか、混じっていない連続スペクトルの場合、それは絶対連続になるのか、これは前回板倉氏ががが取り上げた問題であるが、ここではこの問題の「一般化された energy methods による取り扱い」を紹介する。

Let $r = |x|$ and $\tilde{x} = x/r$. Let $\mu = \mu(r) > 0$ be a weight function satisfying

$$\mu = o(r^{-1}) \ (r \to \infty), \text{ monotone decreasing, and } \mu \in L^1(\mathbf{R}_+).$$

$(A.1)$　$c(x) = \tilde{c}(x) + c_2(x)$, where

$$1 \le -\tilde{c}(x) \le C(1 + r^\alpha) \text{ with } 0 < \alpha \le 2, \quad \tilde{c}(x) \to -\infty \ (r \to \infty),$$

$$-\frac{\beta_0}{r} \le \frac{\partial_r \tilde{c}(x)}{\tilde{c}(x)} \text{ with } 0 < \beta_0 < 1,$$

$$\left|\frac{\partial_r \tilde{c}(x)}{\tilde{c}(x)}\right|^2 + \left|\frac{\partial_r^2 \tilde{c}(x)}{\tilde{c}(x)}\right| \le O(\mu)|\tilde{c}(x)|^{1/2},$$

$$\frac{(\nabla - \tilde{x}\partial_r)\tilde{c}(x)}{\tilde{c}(x)} = O(\mu), \ \frac{\nabla^\ell(\nabla - \tilde{x}\partial_r)\tilde{c}(x)}{\tilde{c}(x)} = O(r^{-1}\mu) \ (\ell = 1, 2).$$

$(A.2)$
$$|\nabla \times b(x)| + |c_2(x)| \le O(\mu)|\tilde{c}(x))|^{1/2}.$$

Theorem 1 *Let $\lambda \in \mathbf{R}$ and let $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ be a solution of* (1). *Under the above conditions, if the support of u is not compact, then we have*

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{S_t} \frac{1}{\sqrt{\lambda - \tilde{c}}} \{|\tilde{x} \cdot \nabla_b u|^2 + (\lambda - \tilde{c})|u|^2\} dS > 0.$$

Point: (1) をベクトル値関数 $\theta = \nabla_b u + \tilde{x}\Big(\mp\sqrt{\lambda - \tilde{c}} + \dfrac{n-1}{2r} + \dfrac{-\partial_r \tilde{c}}{4(\lambda - \tilde{c})}\Big)u$ に対する方程式に書き換えて、それに対する双一次形式を考える。

θ は放射条件の定義にも用いられ、極限吸収の原理の証明にも大切な役割を演じる。